1.2. Математическая постановка задачи множественной проверки гипотез

1.2.1. Задача проверки одной статистической гипотезы

Пусть  – реализация выборки 

из неизвестного распределения F. Относительно распределения  выдвигается нулевая гипотеза **** или, что то же,  – выборка из распределения ****, где ****полностью определено. Альтернативная гипотеза: ****.

Для проверки нулевой гипотезы будем использовать статистику ****, которая является некоторой функцией от выборки.

Для статистики **** мы знаем нулевое распределение, то есть распределение при справедливой нулевой гипотезе.

По этому нулевому распределению мы вычисляем достигаемый уровень значимости, то есть вероятность получить такое или ещё более экстремальное значение статистики, как мы получили в эксперименте:

****

Достигаемый уровень значимости **** сравнивается с уровнем значимости α (как правило, 0,05). Если достигаемый уровень значимости меньше, чем α

****

то нулевая гипотеза **** отклоняется в пользу альтернативы.

При однократной проверке нулевой гипотезы у нас всегда есть вероятность того, что мы совершим ошибку первого или второго рода.

Таблица 1.2.1.1

Справедливая гипотеза

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Принимается  гипотеза | H0 | H1 |
| H0 | Верное принятие нулевой гипотезы | Ошибка II рода |
| H1 | Ошибка I рода | Верное отклонение нулевой гипотезы |

Механизм проверки гипотез построен так, что вероятность ошибки первого рода сверху ограничена достигаемым уровнем значимости α.

1.2.2. Задача множественной проверки статистических гипотез

Пусть , , …,  – реализация выборок , , …,  из неизвестных распределений ****.

Относительно распределений **** выдвигается ****нулевых гипотез ****.

Альтернативные гипотезы: ****.

Для проверки нулевых гипотез будем использовать статистики , , …, , которые являются некоторыми функциями от выборок , , …, .

Для каждой статистики нулевое распределение свое.

Мы можем посчитать достигаемые уровни значимости **** для всех гипотез.

Составим таблицу, в которую запишем количество справедливых и несправедливых, неотклоненных и отклоненных гипотез ****

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Количество справедливых гипотез | Количество несправедливых гипотез | Всего |
| Количество  неотклоненных гипотез | U | T | m-R |
| Количество  отклоненных  гипотез | V | S | R |
| Всего | m0 | m-m0 | m |

Пусть m0 — это множество индексов справедливых нулевых гипотез. Мощность этого множества пусть равна m0. Естественно, это множество нам неизвестно. Если бы мы знали, какие гипотезы верны, а какие не верны, мы бы гипотезы не проверяли.

Пусть R — это множество индексов гипотез, которые мы отклоняем. И мощность этого множества пусть равна R. Тогда пересечение множеств R и m0 даёт нам гипотезы, которые мы неверно отклонили. Мощность этого множества мы будем обозначать **V**, и это есть **число ошибок первого рода**.

Из всех величин, которые в этой таблице записаны, нам известно только m — общее количество гипотез. А единственный параметр, которым мы здесь можем управлять, — это R — количество гипотез, которые мы отклоняем. При этом величина, которая нас пугает больше всего, — это V — количество ошибок первого рода. Мы хотим совершать мало ошибок первого рода. Нам нужно, чтобы V было маленьким. Но при этом единственное, что мы можем делать, — это перераспределять по этой таблице наши гипотезы из 2-й строки в 1-ю. То есть, если мы хотим совершить мало ошибок первого рода, нам нужно отклонять меньше гипотез.

Задача множественной проверки гипотез поставлена. Нас интересует некоторая статистическая процедура, которая дает нам гарантии на V.

Определение. **Групповой вероятностью ошибки I рода (familywise errir rate)** называют вероятность совершить хотя бы одну ошибку I рода:

****

Эту величину мы хотим контролировать, т.е. мы хотим построить такую статистическую процедуру, что вероятность совершить хотя бы одну ошибку I рода будет не больше, чем α:

****

Как этого можно добиться? Единственное, что у нас есть – это уровни значимости ****, на которых проверяются гипотезы ****. Наша задача выбрать **** так, чтобы обеспечить ограничение FWER уровнем α:

****

Самый простой способ эту задачу решить – поправка Бонферрони.